

Pavages, rosaces et frises



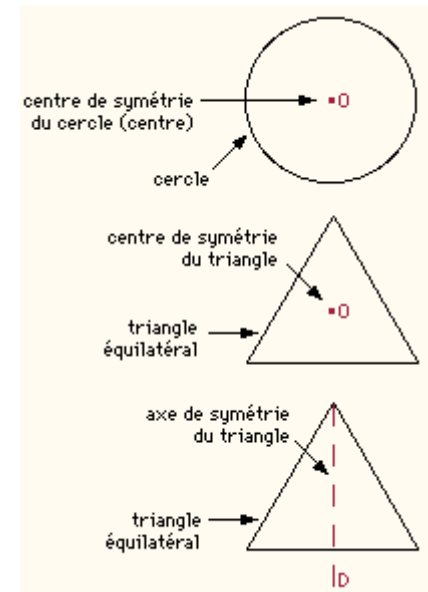
Visions d'une forme d'invariance
par
l'invariance de formes...

Les symétries se rencontrent...

- Comme expression courante de la nature ou de la culture



- Comme objet de recherche



Miroirs...

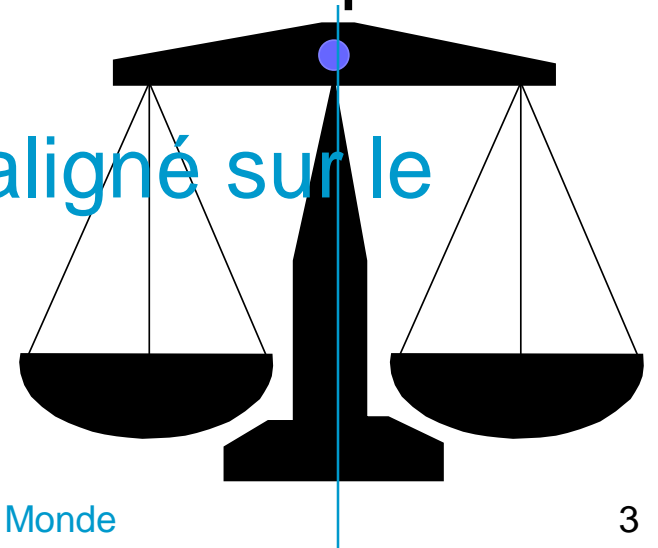
Rotations...

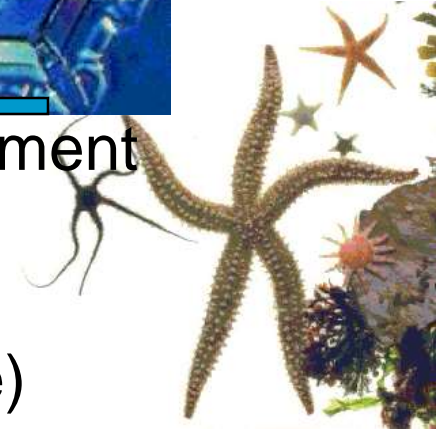
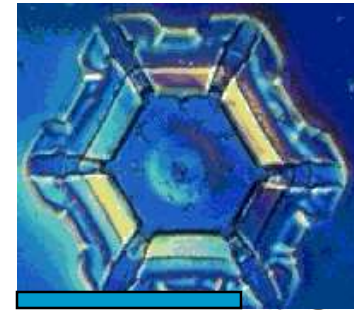
Translations...

- Une figure est ***symétrique*** si elle reste pareille à elle-même après changement de sa position, de son orientation ou réflexion dans un miroir.

La balance possède une symétrie: elle se retourne sur elle-même par réflexion

(le miroir est vertical, aligné sur le fléau).





- De nombreux objets naturels sont fortement symétriques:
étoiles de mer (symétrie pentagonale)
cristaux de neige (symétrie hexagonale)
corps d'un mammifère (symétrie réflexion-miroir)



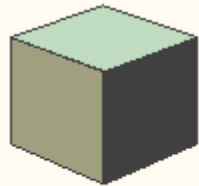
- Partout dans le monde, l'art et l'artisanat font usage de figures symétriques: tapis, tissus, bijoux, décorations d'ustensiles...

L'étude scientifique des symétries traverse les millénaires: (1)

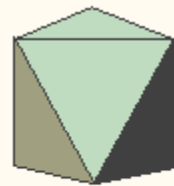
Platon, Archimède, Kepler...
découvrent des figures
fortement symétriques



Tétraèdre (4 faces)



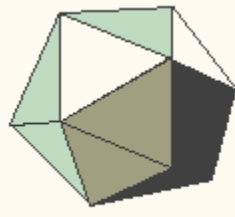
Cube (6 faces)



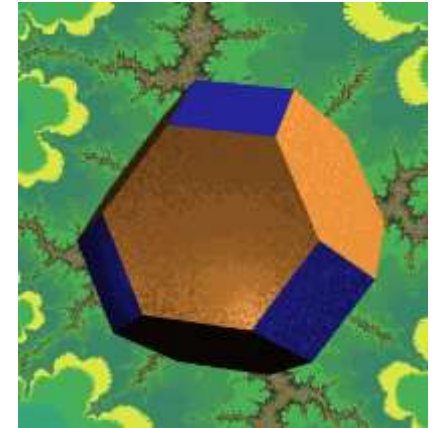
Octaèdre (8 faces)



Dodécaèdre (12 faces)



Icosaèdre (20 faces)



L'étude scientifique des symétries traverse les millénaires: (2)

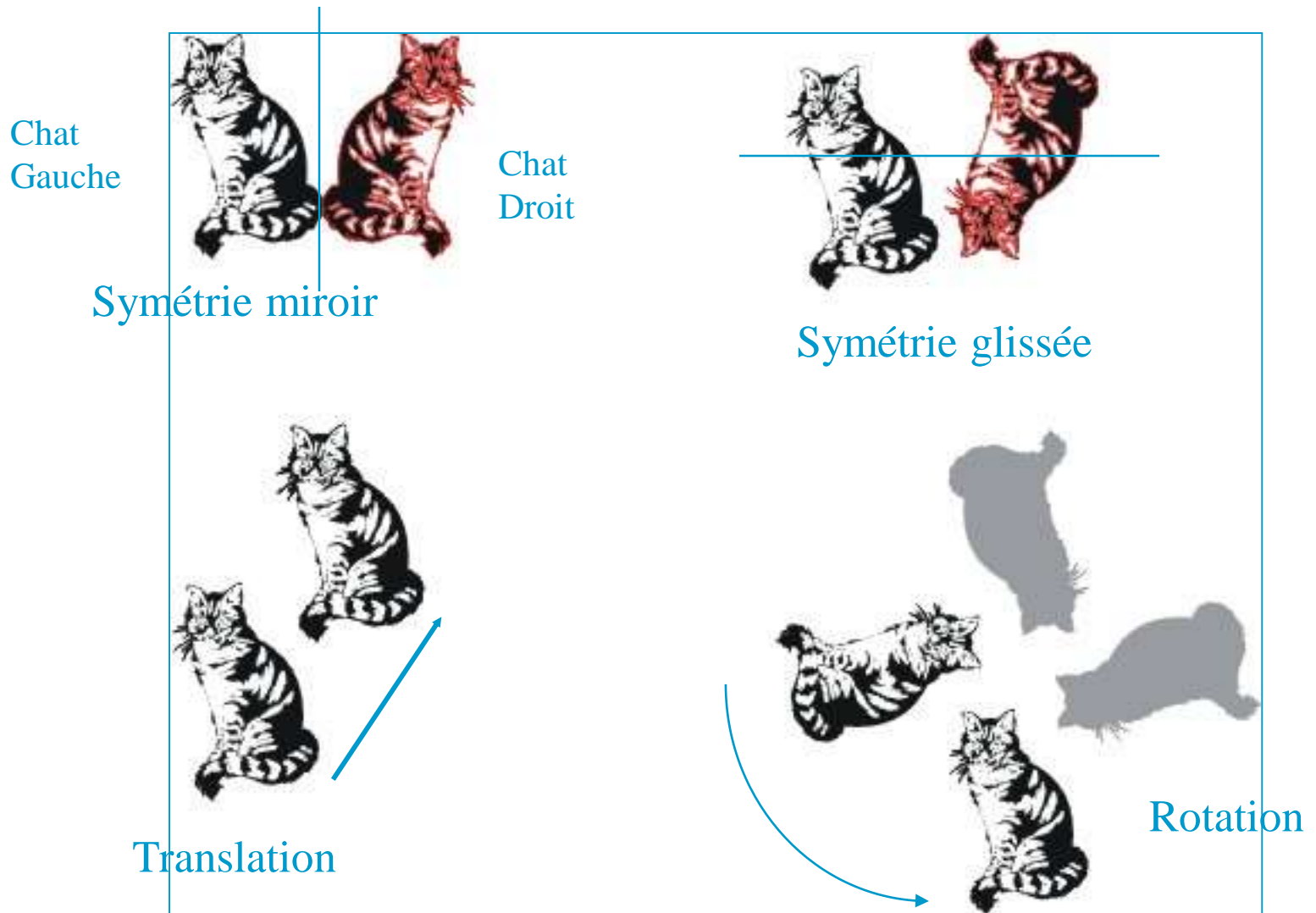


- Léonard de Vinci classe les rosaces par types

L'étude scientifique des symétries traverse les millénaires: (3)

- L'étude des formes symétriques est systématisée à l'occasion de la recherche d'une **classification des cristaux** (Augustin Bravais, 1849)
- Vers 1890, E. Fedorov et A. Schönflies établissent la classification complète et moderne des figures planes en fonction de leurs symétries . Ils classent ces figures en 26 familles: les **types de symétrie**.
- Dans les années 1930, HSM Coxeter étudie les types de symétrie au départ de la notion de **zone fondamentale**.

Transformations du plan

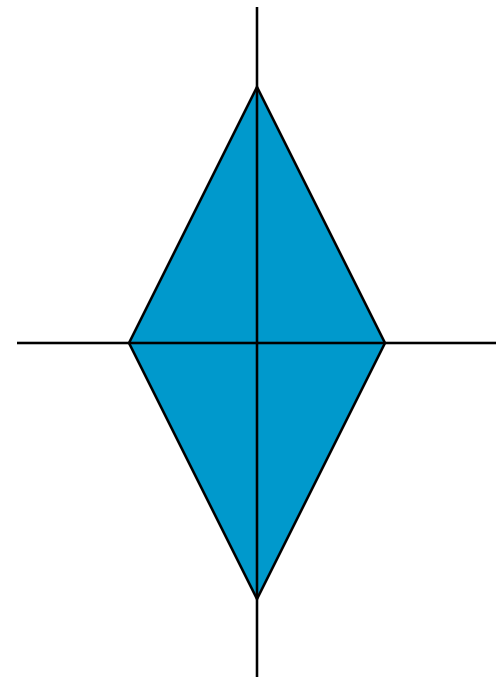
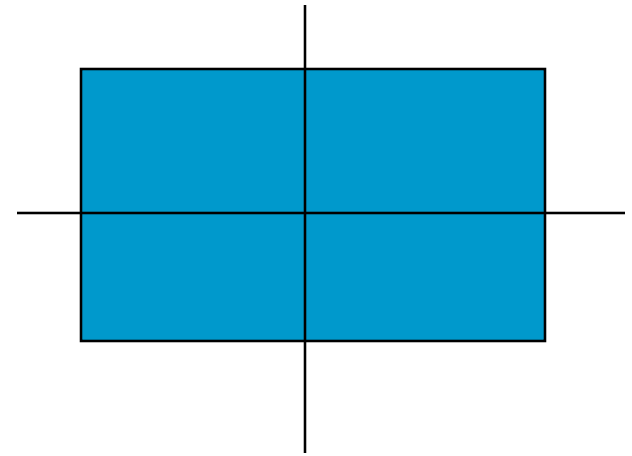




Types de symétrie

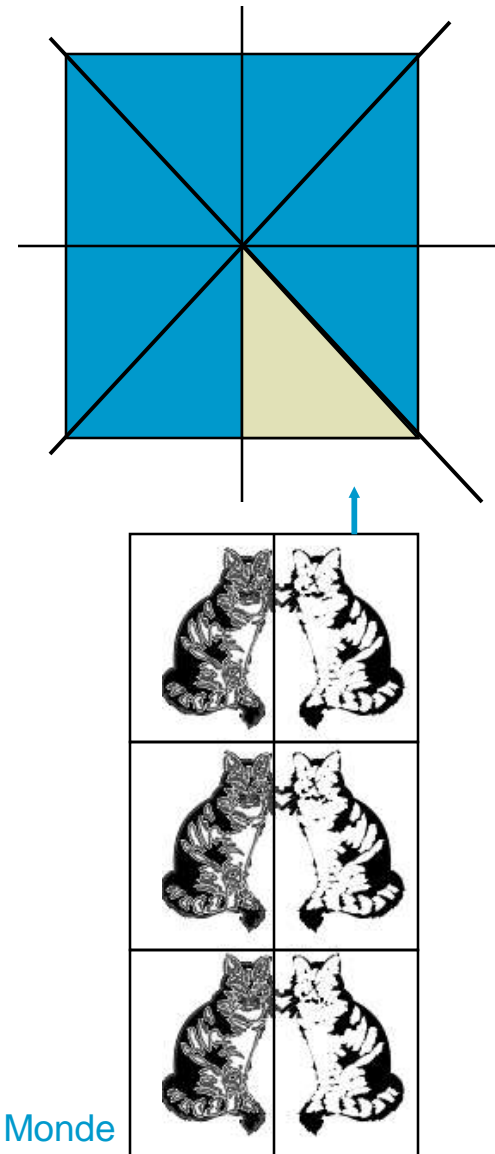
- Deux figures «ont le même type de symétrie» si chaque transformation qui conserve l'une conserve l'autre et réciproquement.
- Par abus de langage, on parlera des «symétries» d'une figure, même s'il s'agit de rotations !
- Les mathématiciens classent les figures en fonction de leur «type de symétrie».

- Le **rectangle** et le **losange** sont tous deux conservés si l'on effectue:
 - une symétrie (miroir) par rapport à une droite verticale
 - une symétrie (miroir) par rapport à une droite horizontale
 - une rotation de 180° par rapport à leur centre
- Ces deux figures ont (donc) **le même type de symétrie.**



Zone fondamentale

- On peut découper une figure symétrique en **zones de forme identique**. Au sein d'une de ces zones, aucun point n'est l'image d'un autre par une des transformations qui conservent la figure; par contre tout point est l'image d'un unique point de chacune des autres zones par une de ces transformations.



Figures symétriques dans le plan

FriseF1m

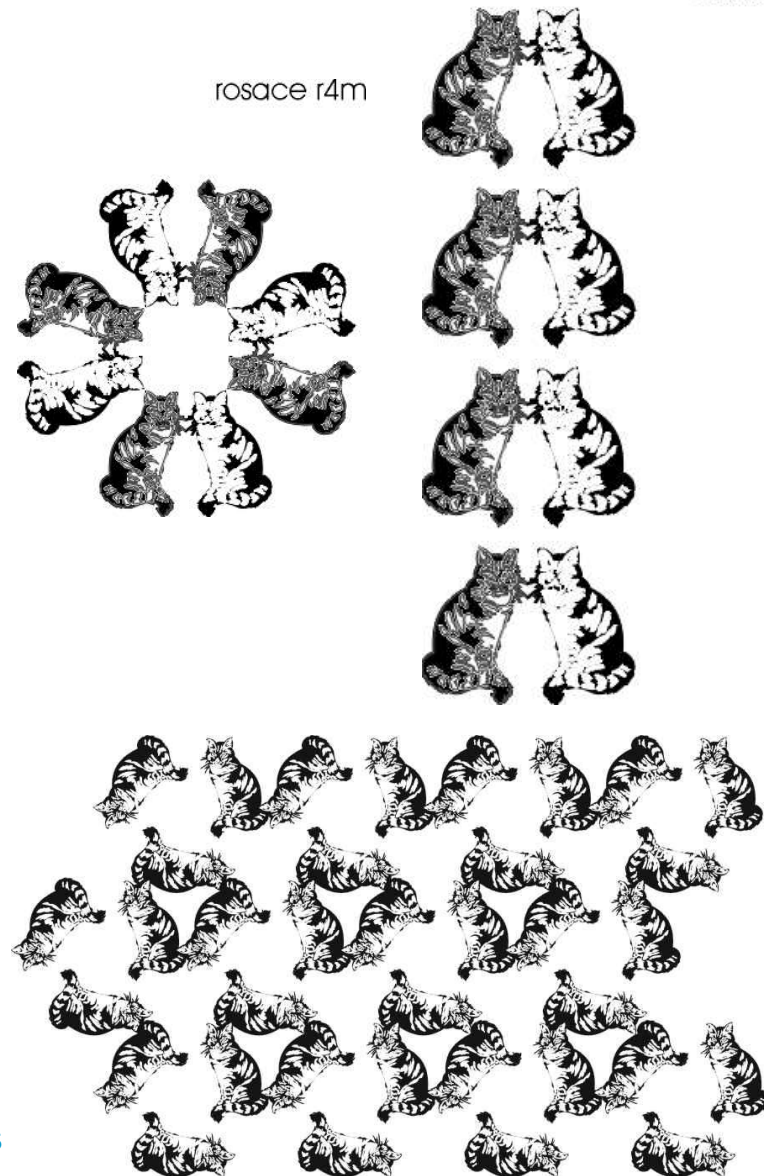
On peut distinguer trois familles de figures symétriques:

Les **Rosaces** ne sont conservées par aucune translation

Les **Frises** sont conservées par des translations dans une seule direction

Les **Tapisseries** ou **Pavages** sont conservé(e)s par des translations dans plusieurs directions

rosace r4m



Classification des Rosaces

- Les **Rosaces** sont de deux types:

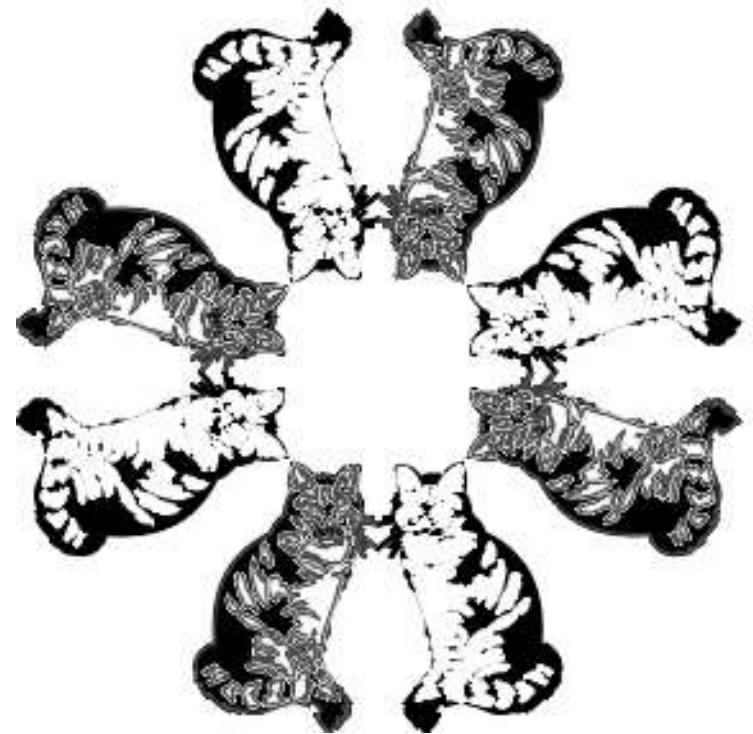
Le premier type n'a pour symétries que des rotations.
Celles-ci peuvent être en nombre quelconque.

Démonstration



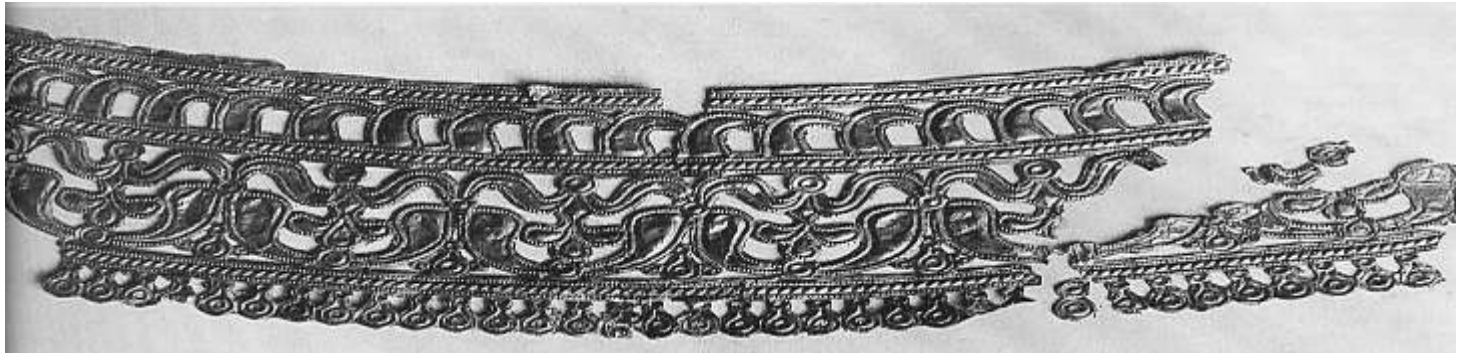
rosace r4m

Le second
type a pour
symétries des
rotations et
des **miroirs** en
nombre égal.



Classification des Frises

- Une frise peut être dessinée sous la forme d'une bande illimitée de largeur quelconque. Les frises que l'on rencontre dans l'art ne sont évidemment que des morceaux de cette bande. Toute frise est conservée par des **translations** dans la direction de l'axe de la bande.



Il y a **7 types de frises.**

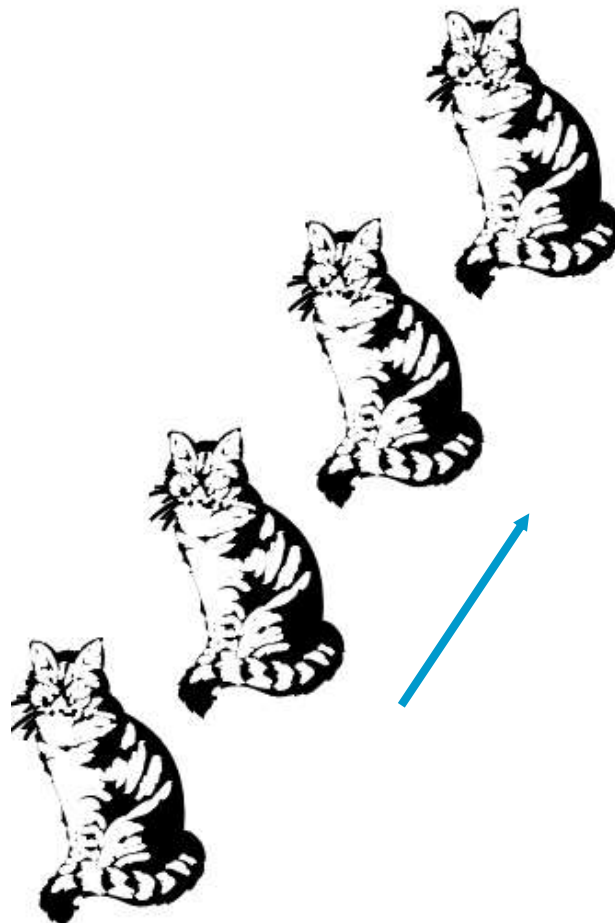
Les 7 types de frises

■ Signification des notations:

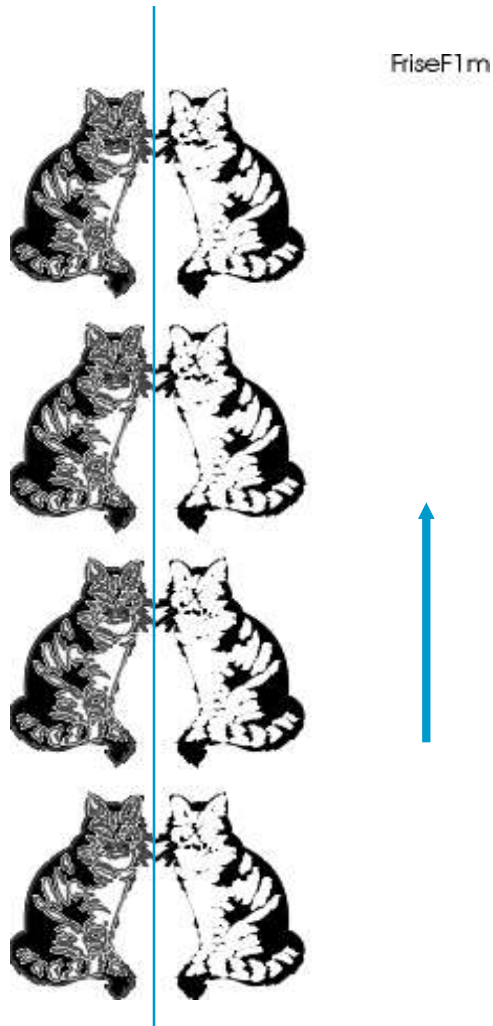
Notation cristallographique	Notation géométrique	Symétries
f1	1	Rien que des translations (T)
f2	C	T & rotations de 180°
fm1	V	T & miroirs perpendiculaires à l'axe
f1m	H	T & miroir par rapport à l'axe
f1g	G	T & symétries glissées
fm2	GV	T & rotations de 180° & symétries glissées & miroirs perpendiculaires à l'axe (aussi noté RV)
f2m	HV	T & miroirs perpendiculaires à l'axe & miroir par rapport à l'axe & rotations de 180° & symétries glissées

Frise F1: rien que des translations

friseF1



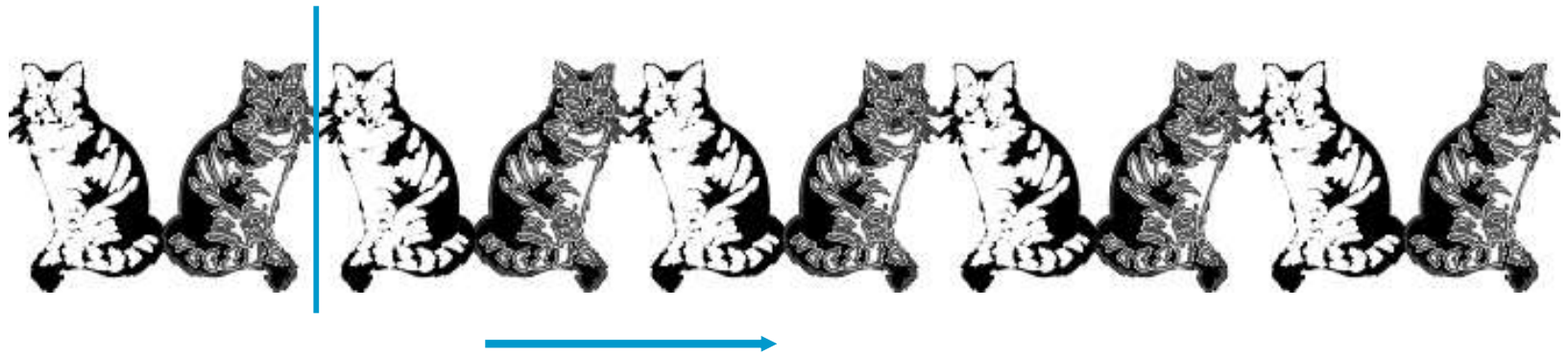
Frise F1m



Translations et
Miroir dans la
direction de l'axe
de la frise.

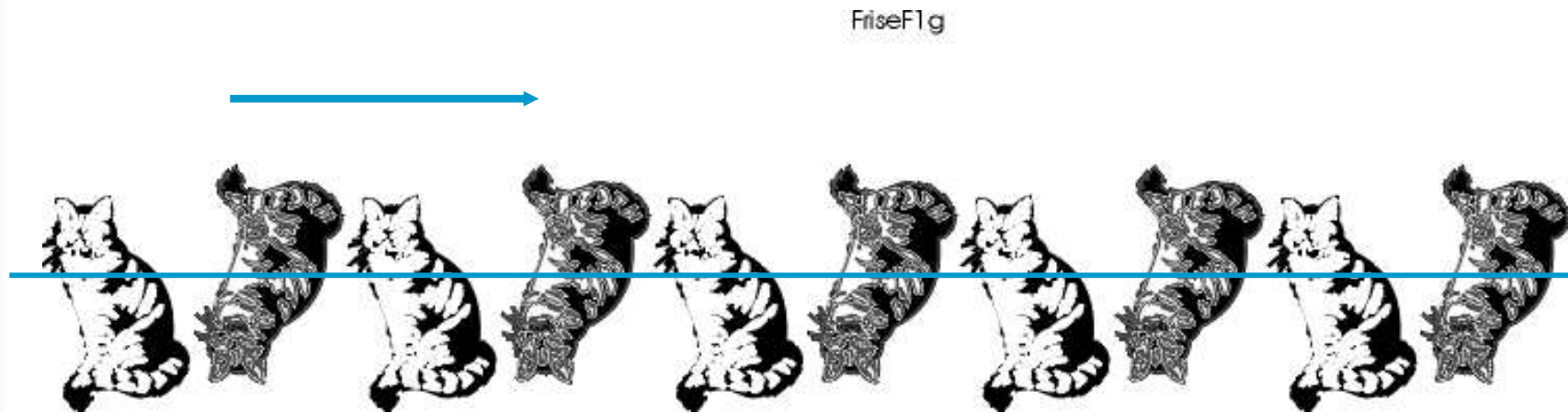
Frise Fm1

FriseFm1



Translations et Miroirs orthogonaux à l'axe de la frise.

Frise F1g



Translations et Symétries glissées
dirigées le long de l'axe de la frise

Frise F2

FriseF2

Rotations de 180°
(=symétrie centrale)

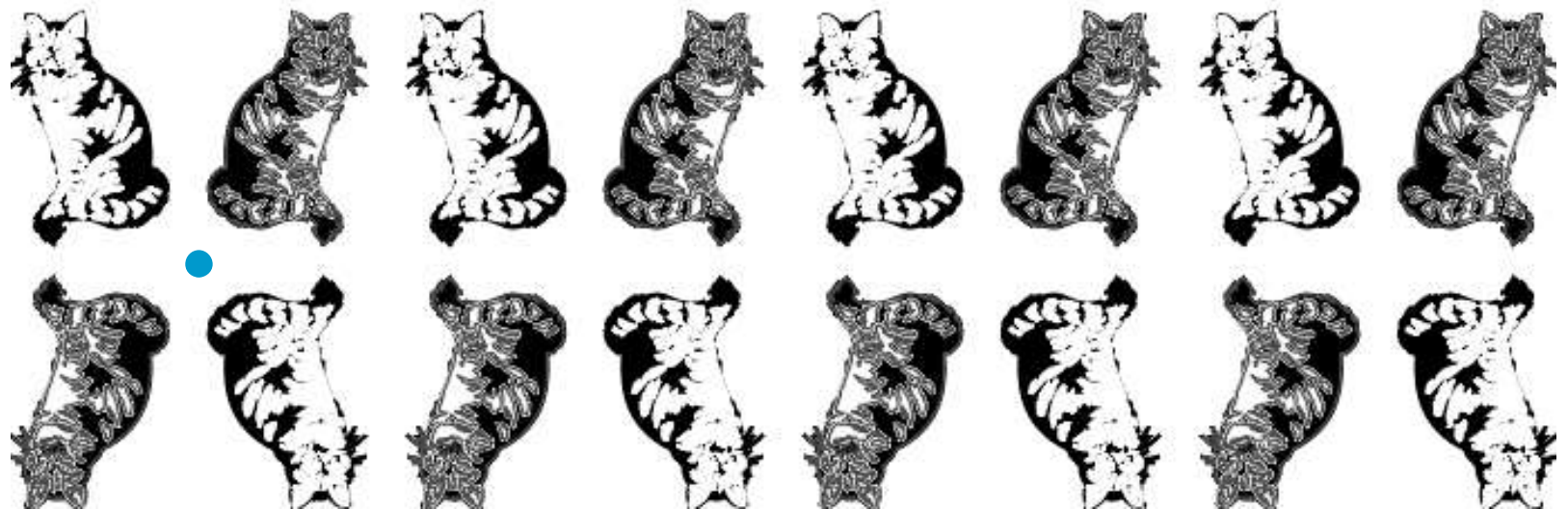


Translations et Rotations dont les centres sont sur l'axe de la frise

Frise F2m

FriseF2m

Translations et Rotations de 180° dont les centres sont sur l'axe de la frise



Miroirs dans deux directions orthogonales, dont l'une est celle de l'axe de la frise

Frise Fm2

Translations et Rotations de 180° dont les centres sont sur l'axe de la frise

FriseFm2



Miroirs orthogonaux à la direction de l'axe et symétries glissées dont l'amplitude vaut la moitié de celle d'une translation.



Classification des Pavages

- Pour caractériser un Pavage (une tapisserie), on utilise:

Le nombre de rotations autour d'un même point conservant le dessin: ce nombre ne peut être que 1, 2, 3, 4 ou 6 (on appellera ce nombre l'ordre de la rotation)

La présence ou l'absence de miroirs et/ou de symétries glissées

Le nombre de directions de miroirs différentes

Dans quelques cas, la disposition des axes de miroirs ou des centres de rotation par rapport aux directions de translations



Comment reconnaître le type de symétrie d'un pavage ?

- Commencez par déterminer quelles sont les rotations qui la conservent.
- Ne gardez que l'ordre le plus grand (s'il y a des rotations d'ordre 3 et d'ordre 6, ne retenez que 6)
- Référez vous à l'une des pages suivantes pour la suite de la procédure.



Conventions graphiques

Dans les dias qui suivent, les conventions suivantes ont été utilisées :

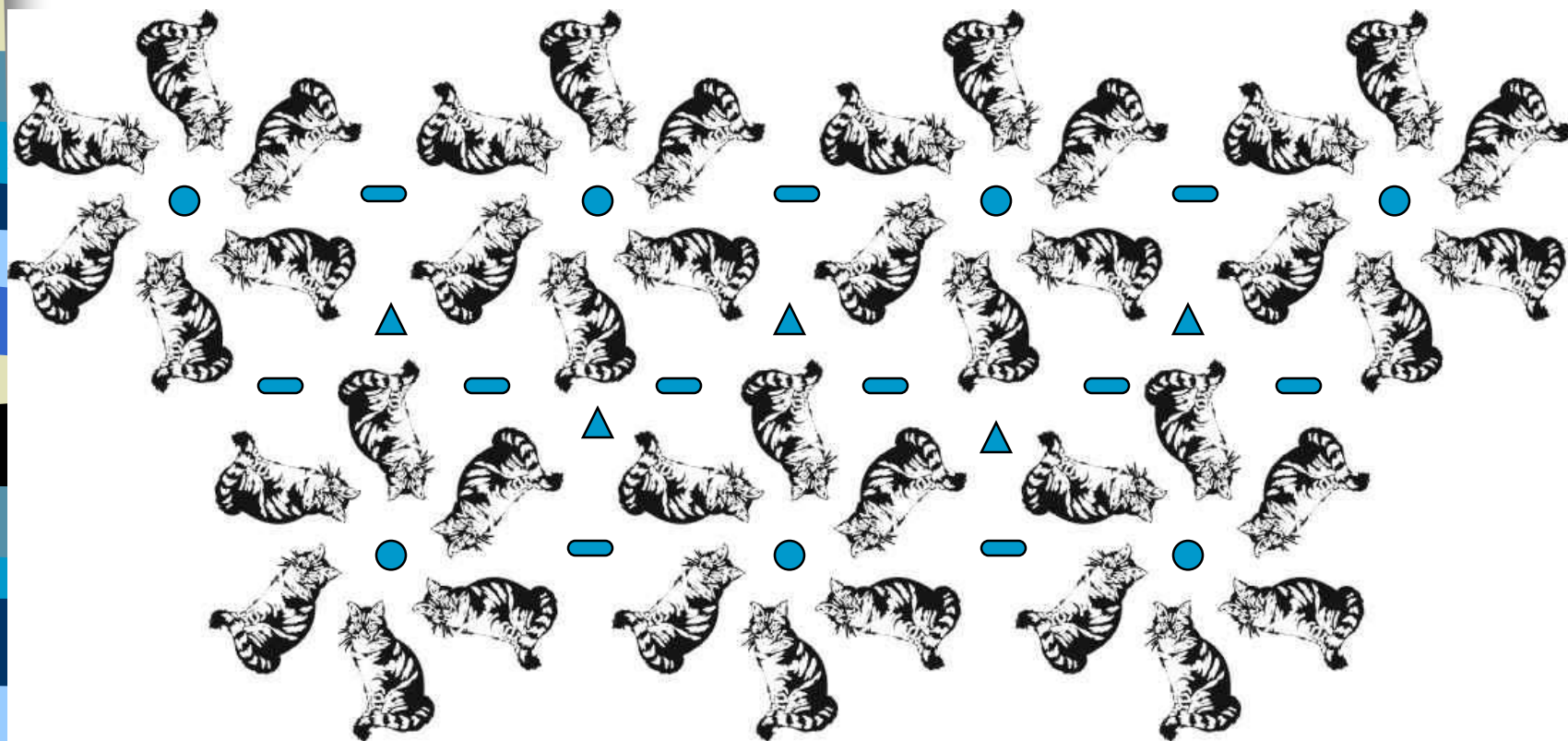
- Les axes de symétrie (miroirs) ont été tracés
- Une flèche coudée marque une symétrie glissée lorsque les miroirs correspondants n'existent pas
- Les centres de rotations principaux sont marqués par un cercle (p ex rotation d'ordre 4 dans $p4m$)
- Les centres de rotation d'ordre inférieur sont marqués par un ovale (pour les rotations d'ordre 2) ou un triangle (pour les rotations d'ordre 3)



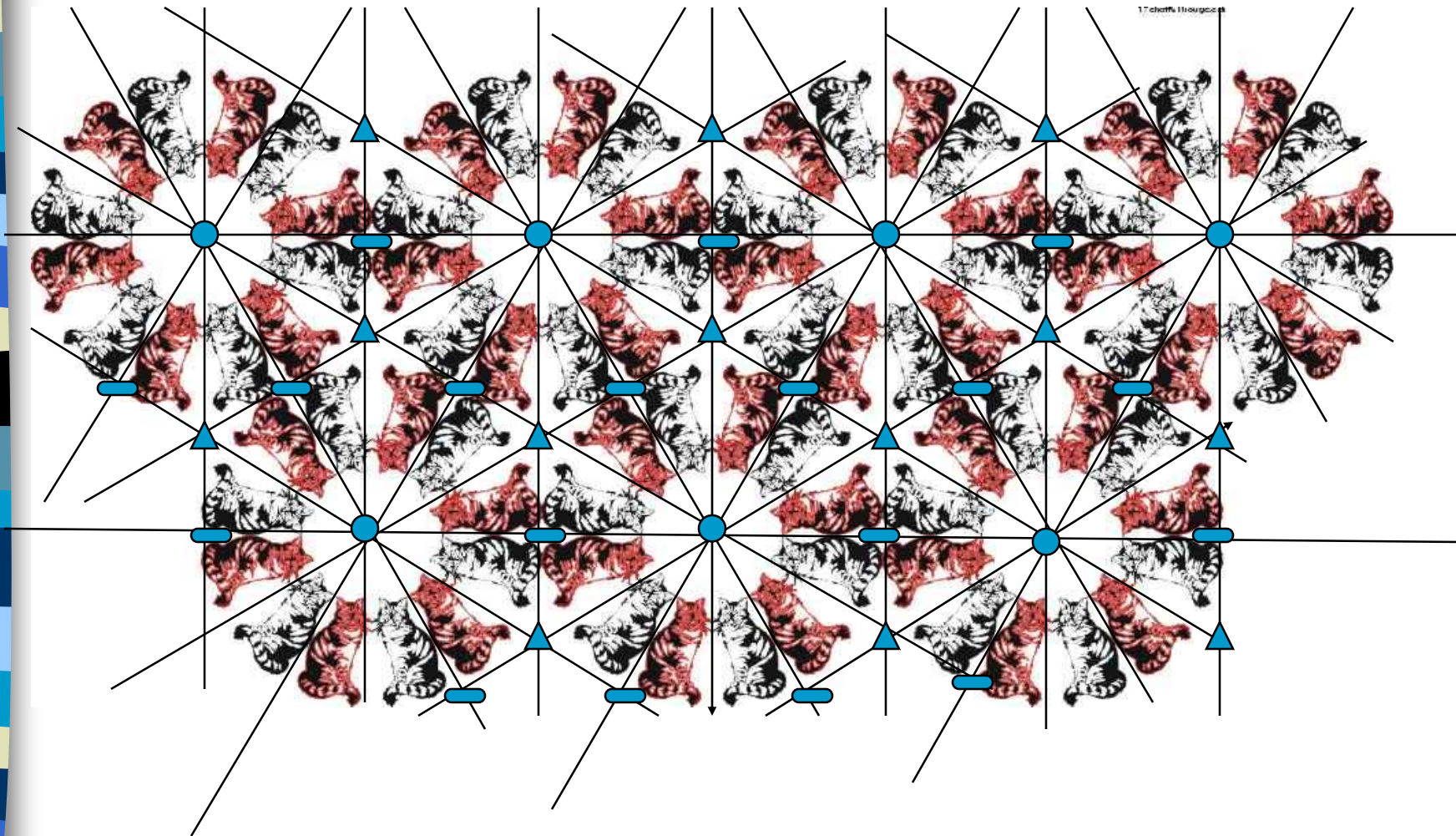
Il existe des rotations d'ordre 6

- Il existe des miroirs
- Il n'existe pas de miroirs
- Type p6m
- Type p6

P6



P6M

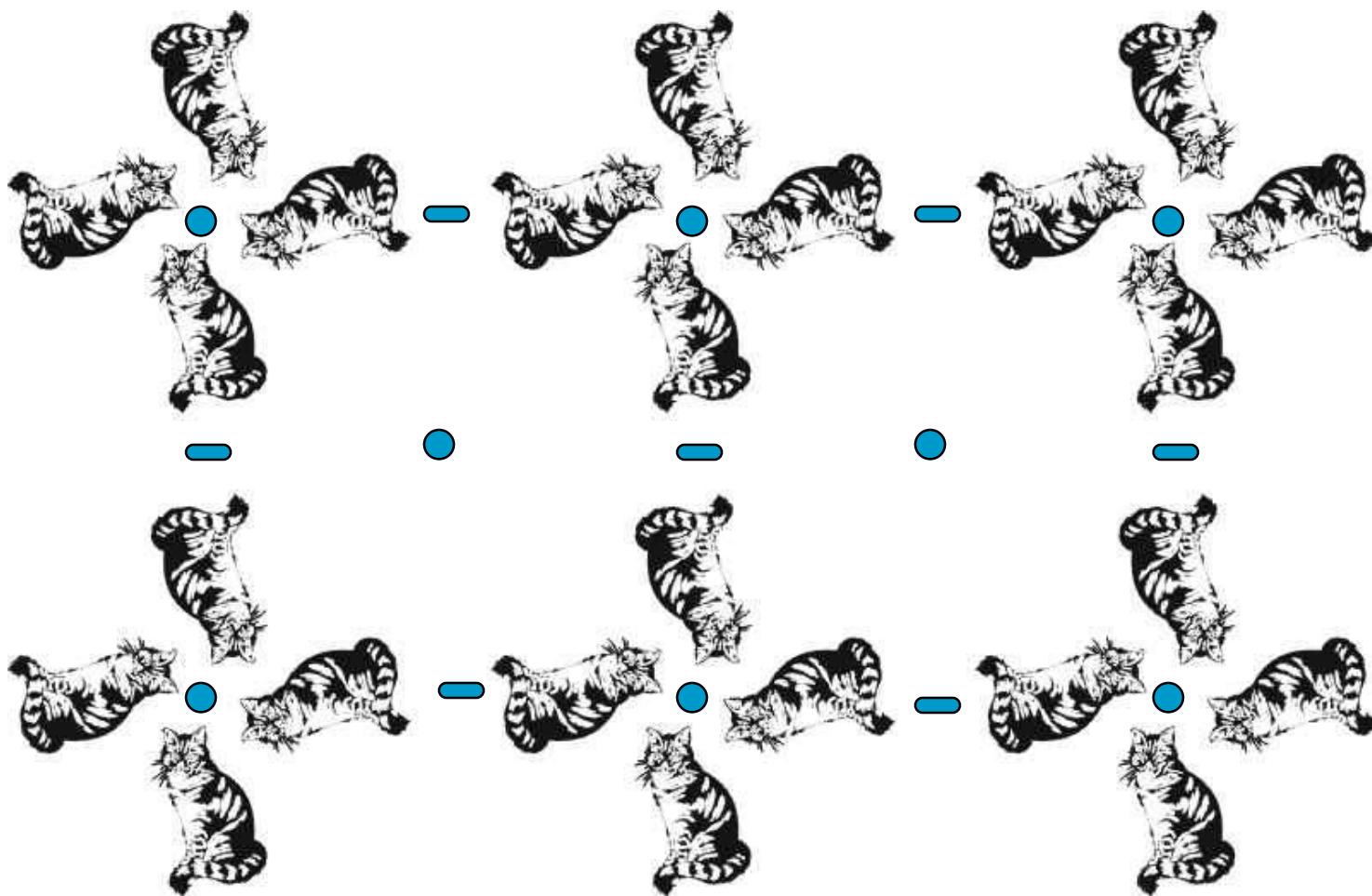




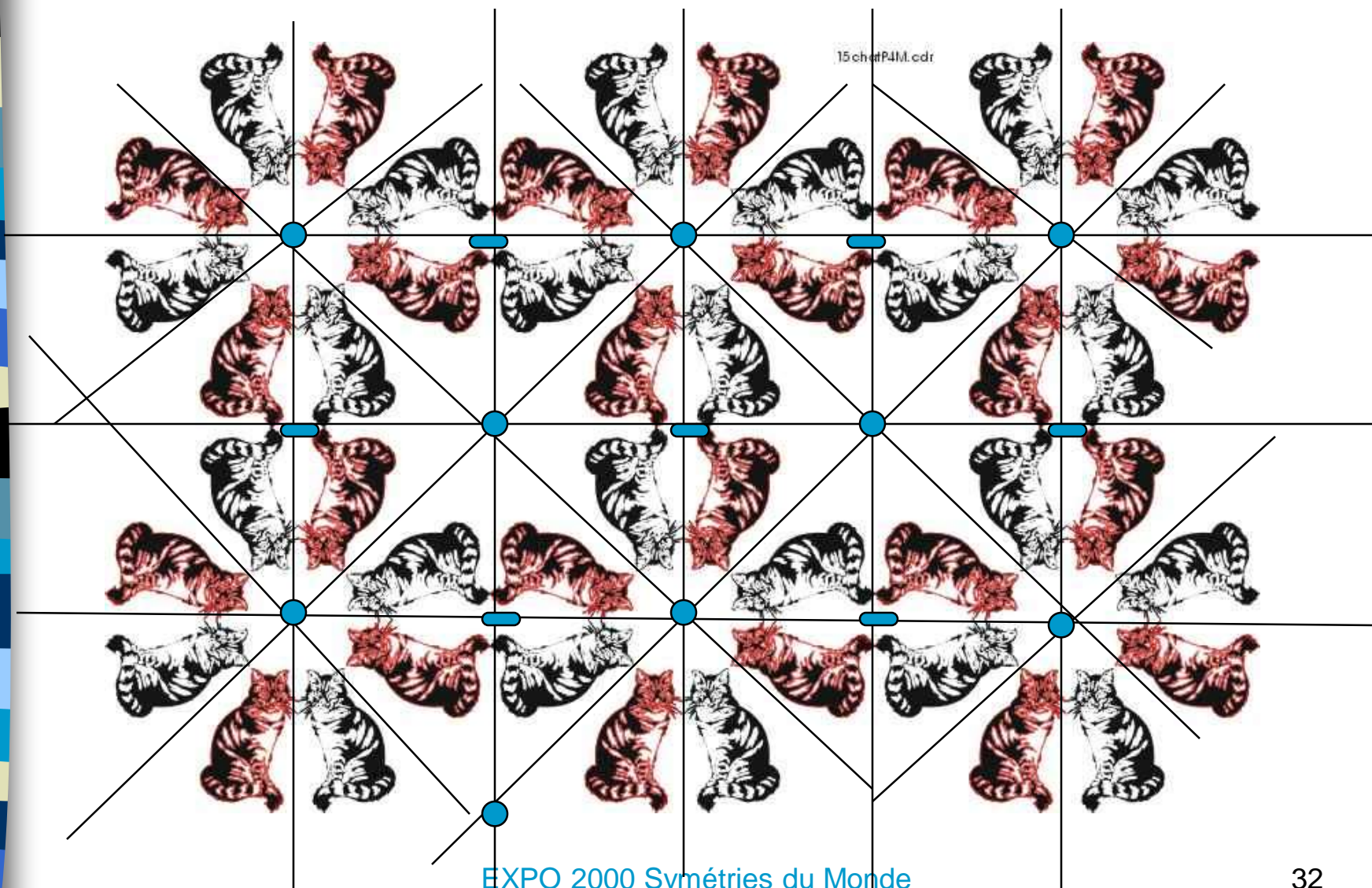
Il existe des rotations d'ordre 4

- Il existe des miroirs dans 4 directions
- Il existe des miroirs dans 2 directions
- Il n'existe pas de miroirs
- Type p4m
- Type pm4
- Type p4

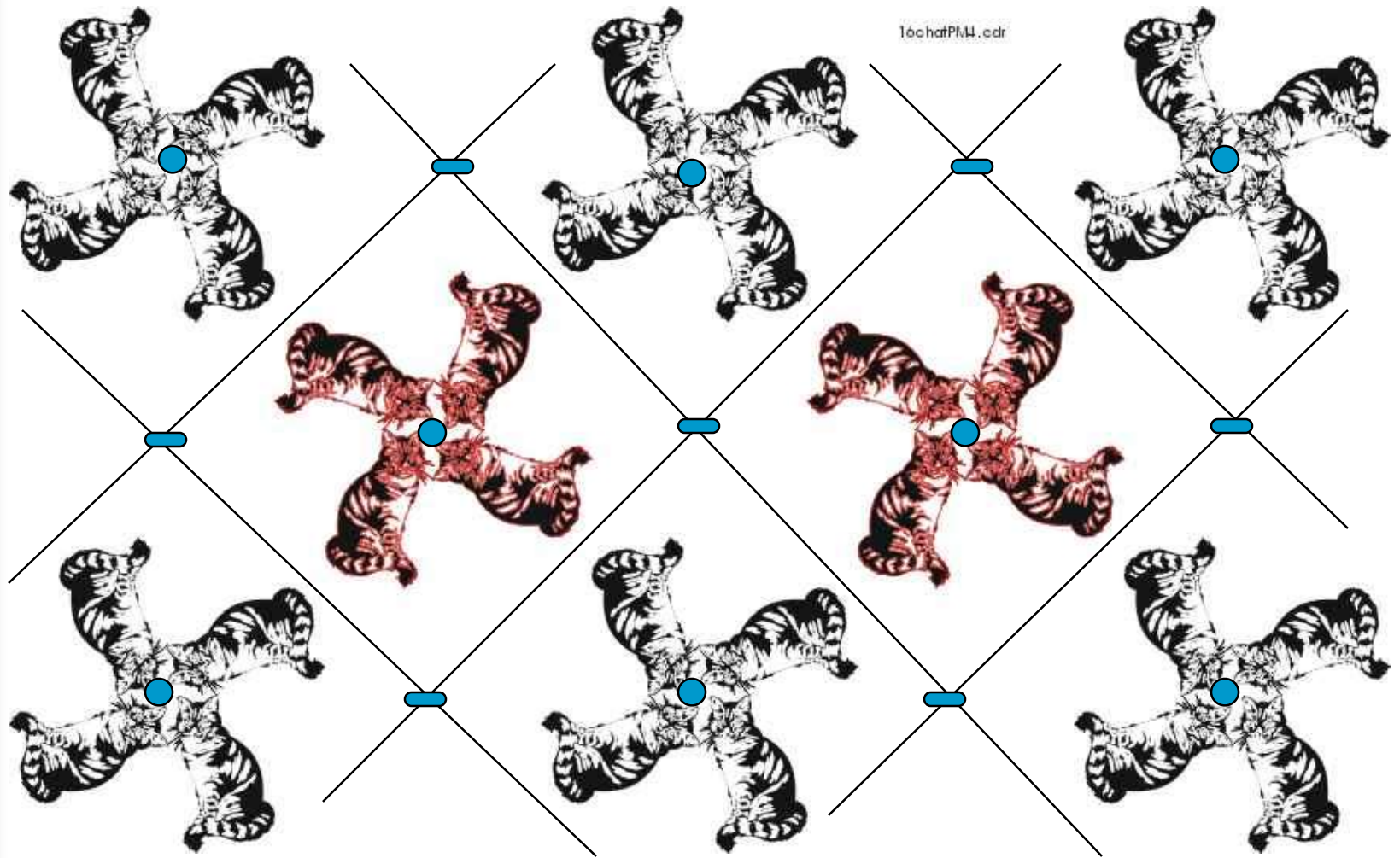
P4



P4M



PM4

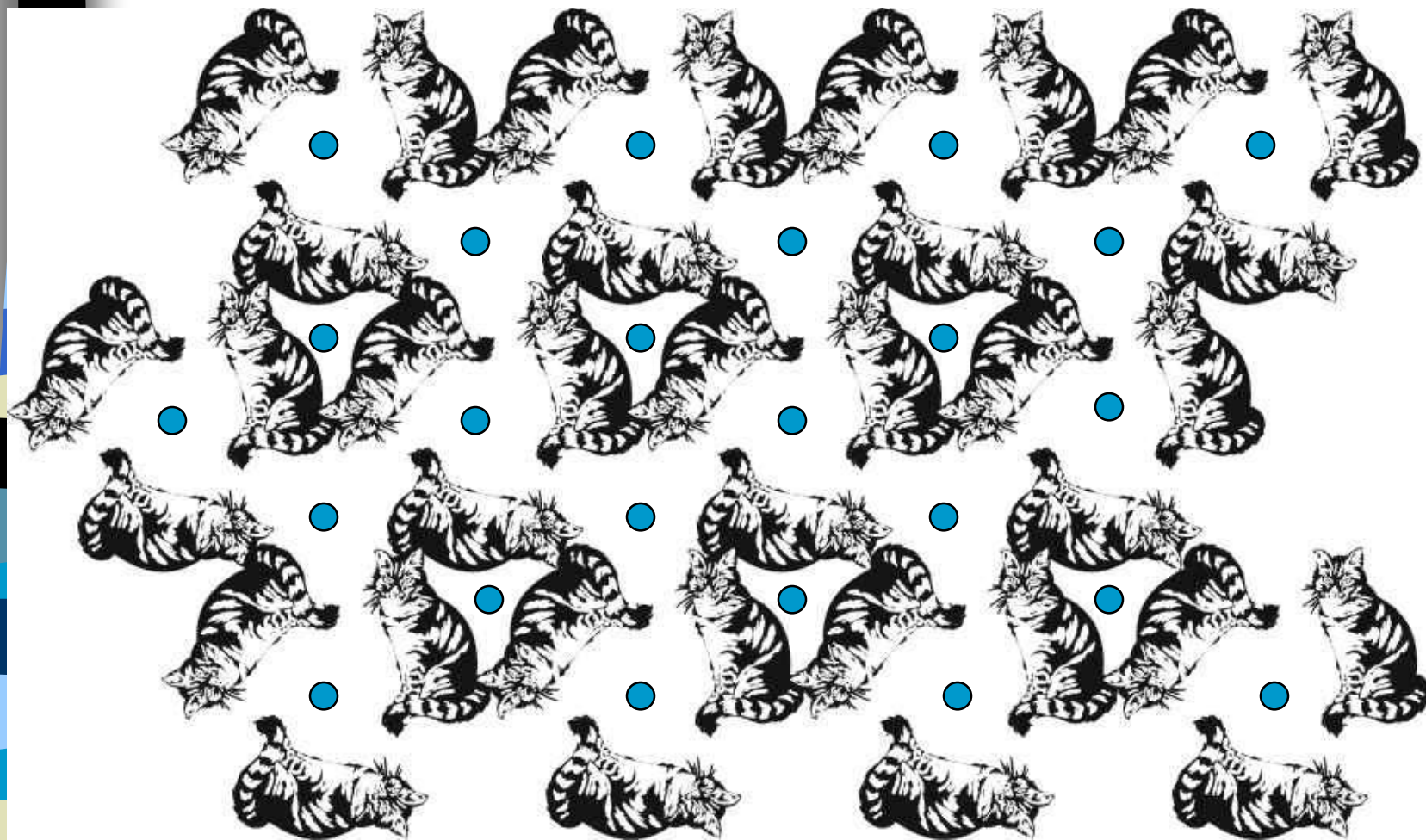




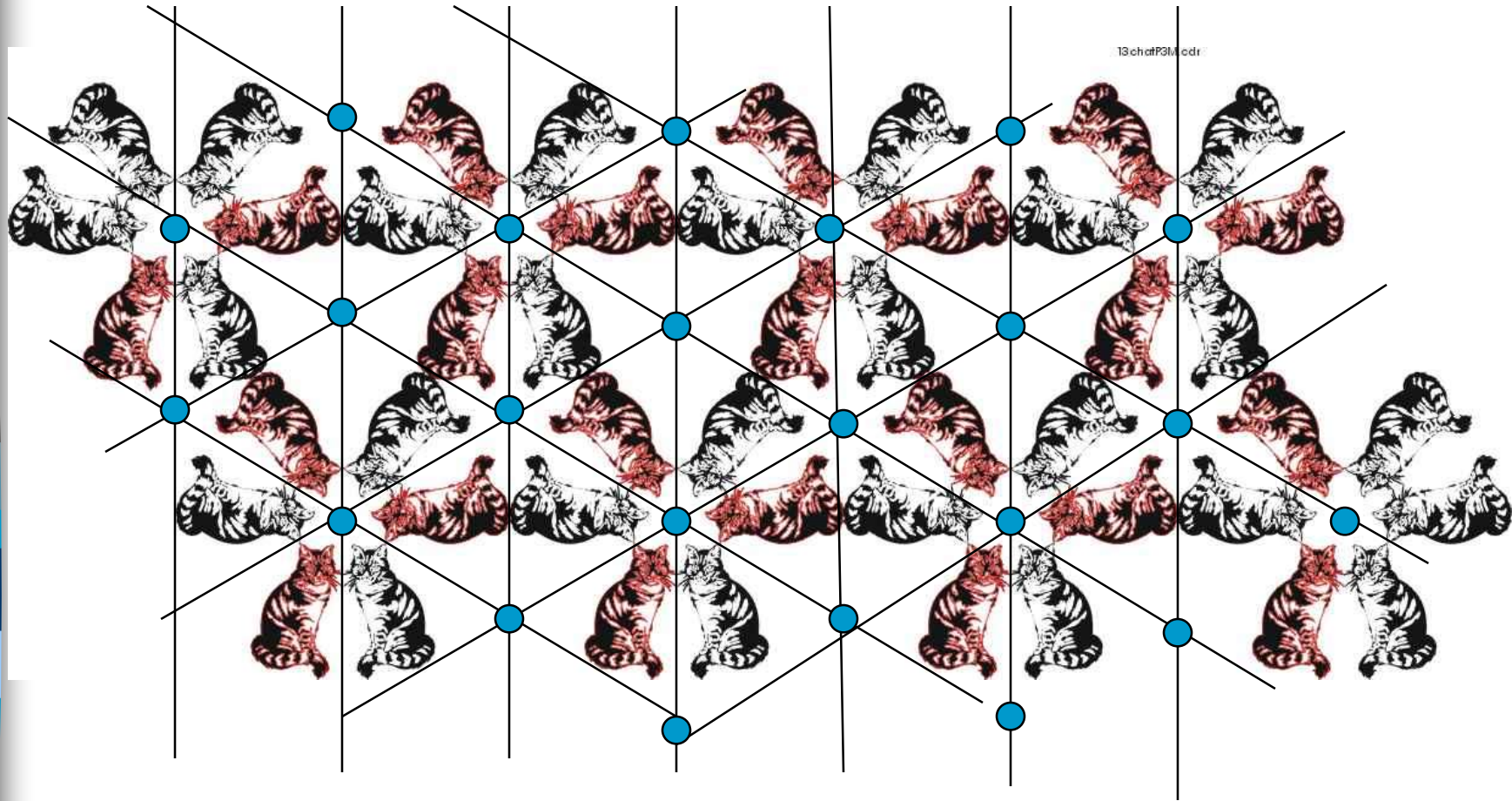
Il existe des rotations d'ordre 3

- Il existe des miroirs ; tous les centres de rotation sont sur les axes de symétrie
- Il existe des miroirs ; et des centres de rotation en dehors des axes
- Il n'existe pas de miroirs
- Type p3m
- Type pm3
- Type p3

P3

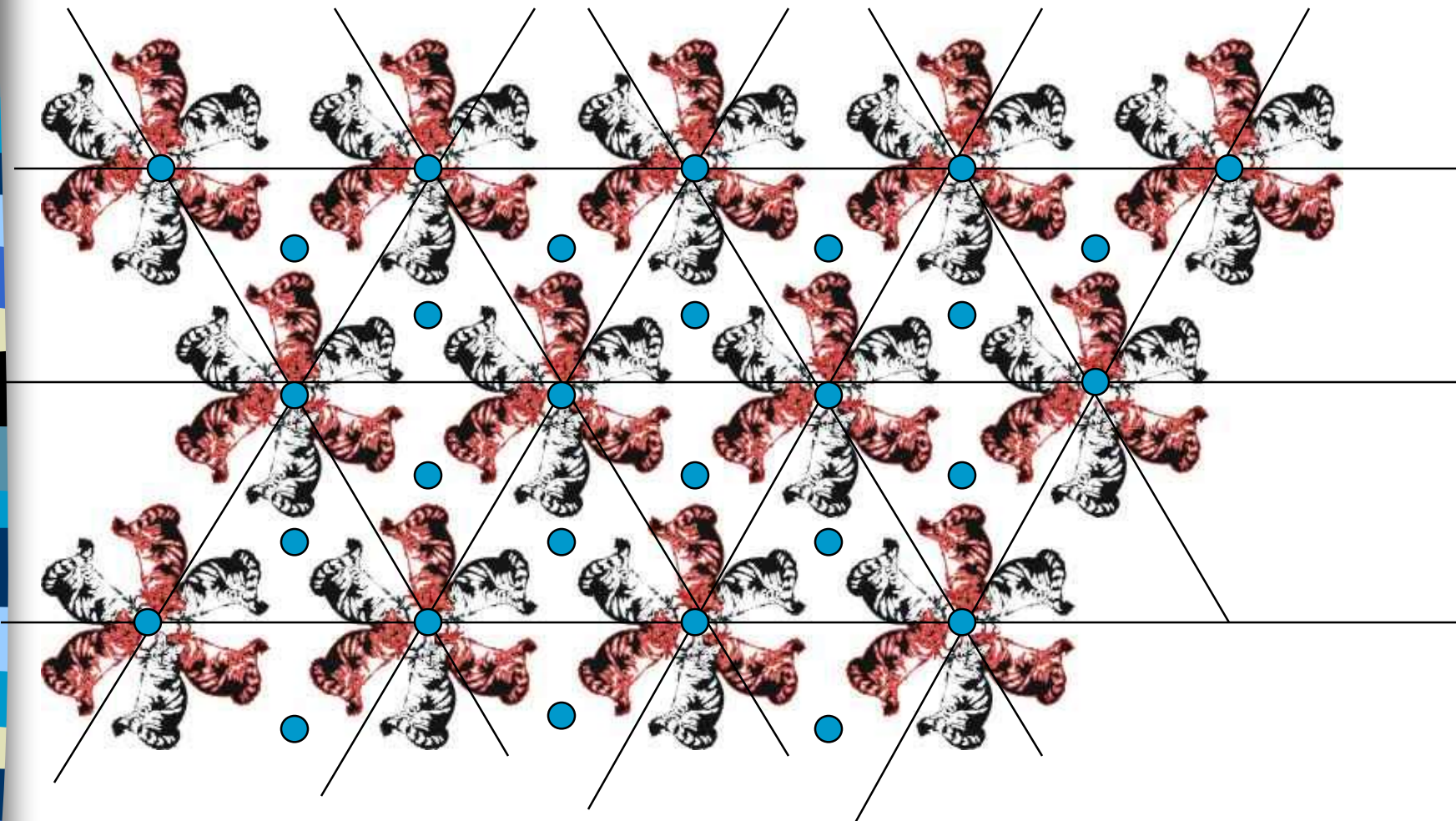


P3M



PM3

14cha1PM3.cdr



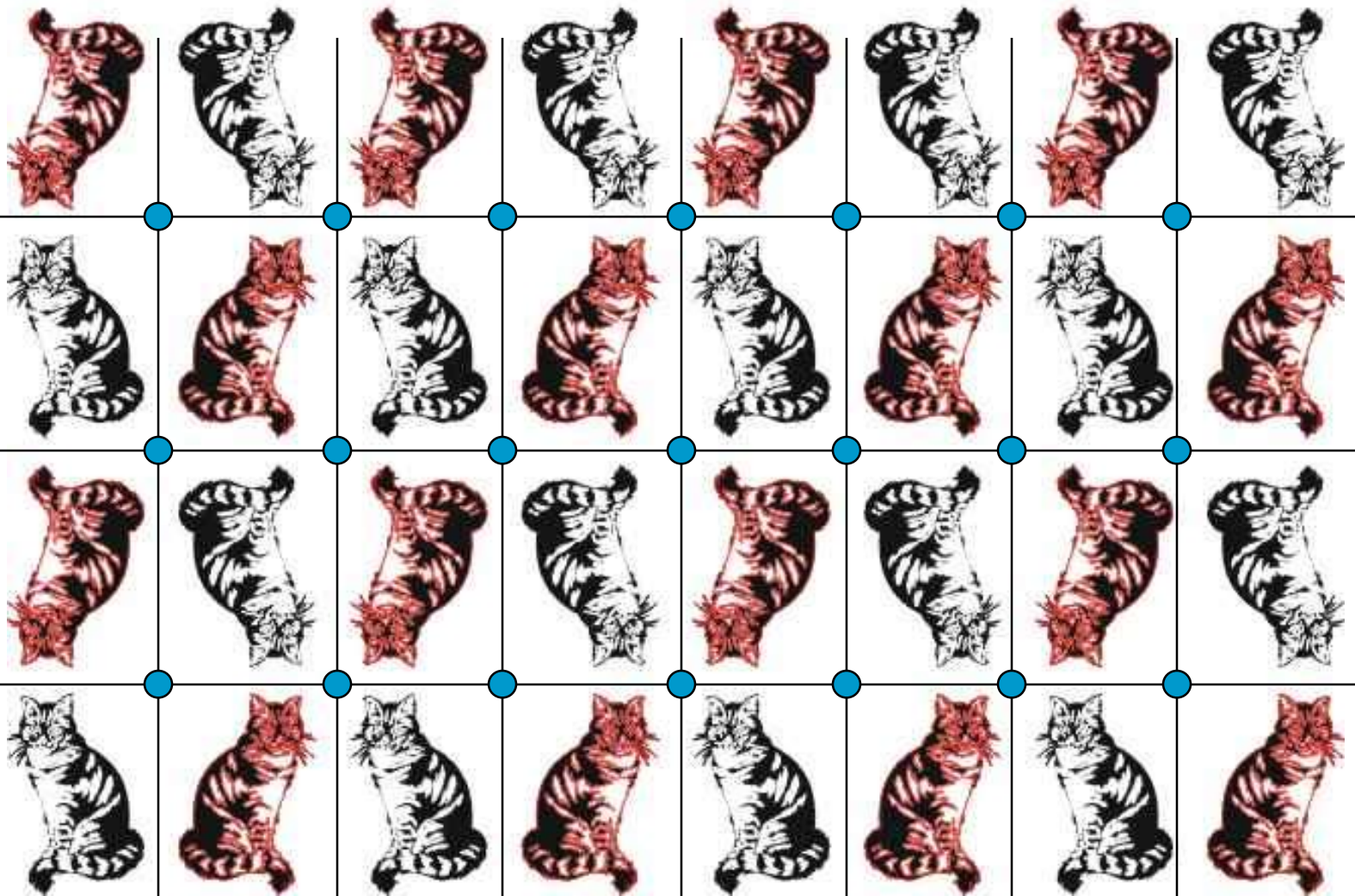


Rotations d'ordre 2 + miroirs

- Une direction de miroirs
 - Type p2g
- Deux directions de miroirs ; tous les centres de rotation sont sur les axes
 - Type p2m
- Deux directions de miroirs ; des centres de rotation en dehors des axes
 - Type pm2

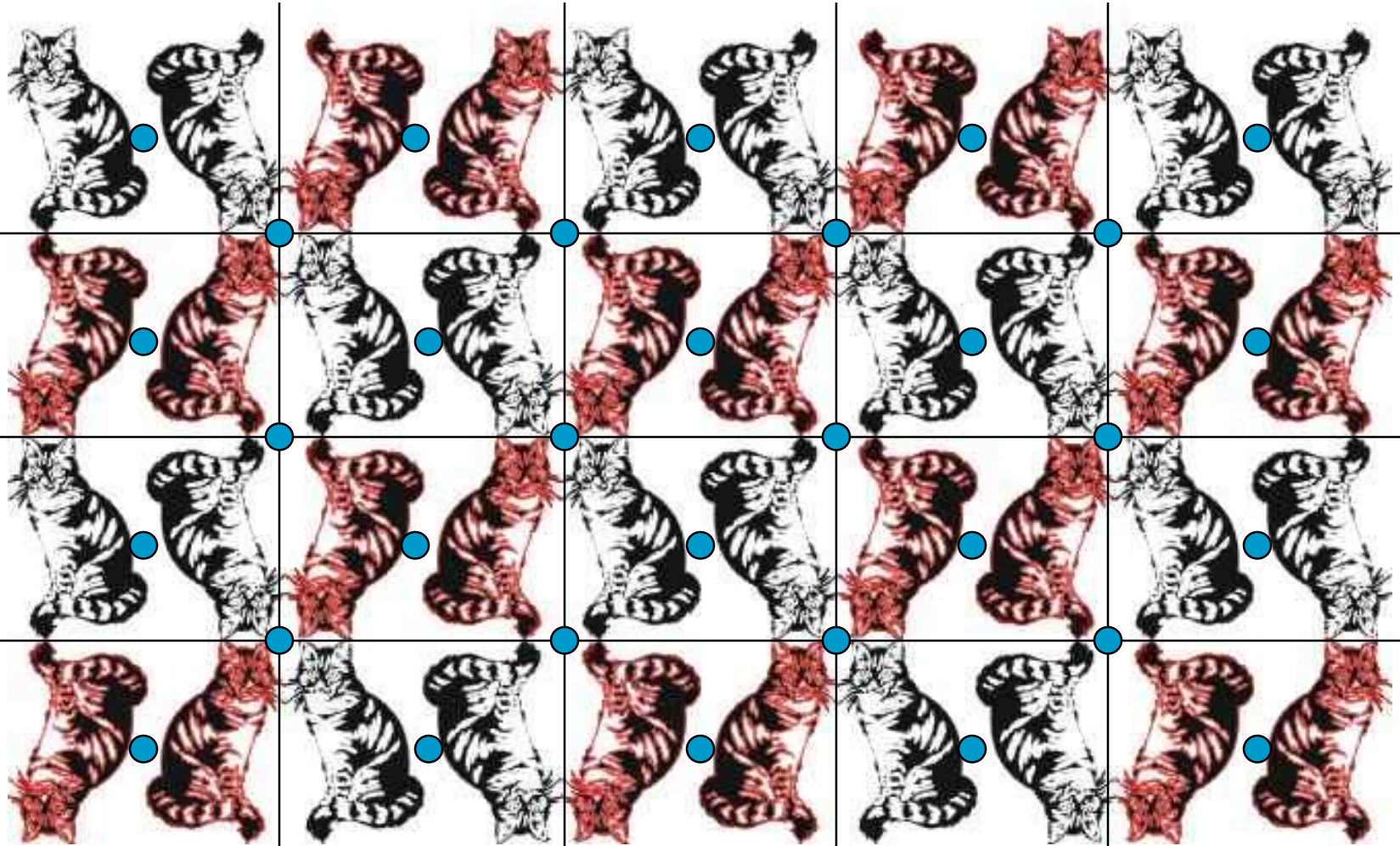
P2M

10chatP2M.cdr



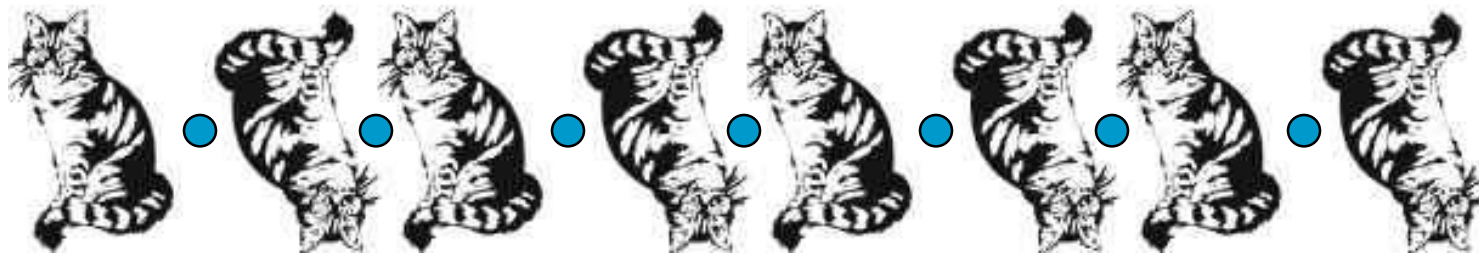
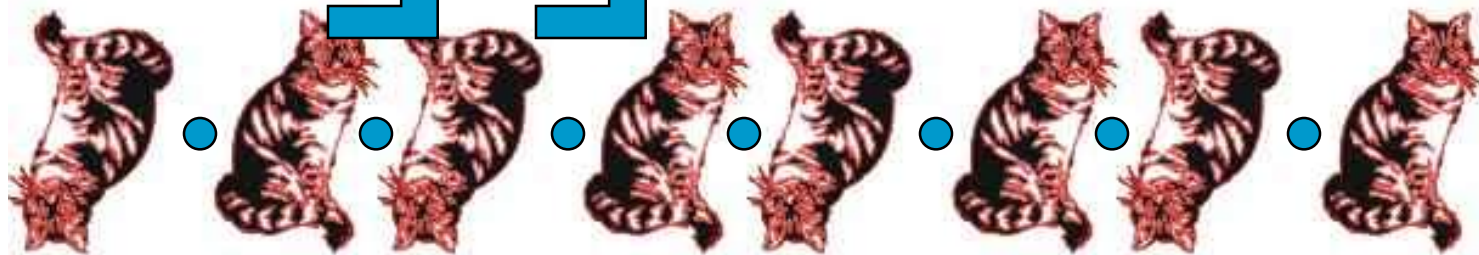
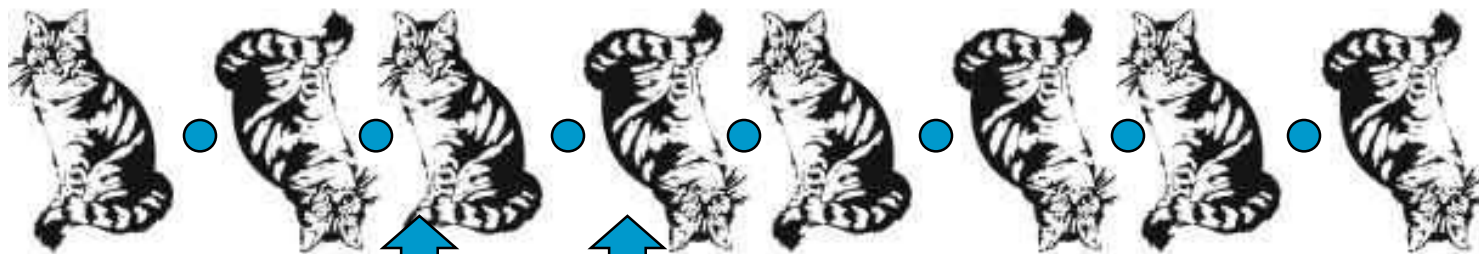
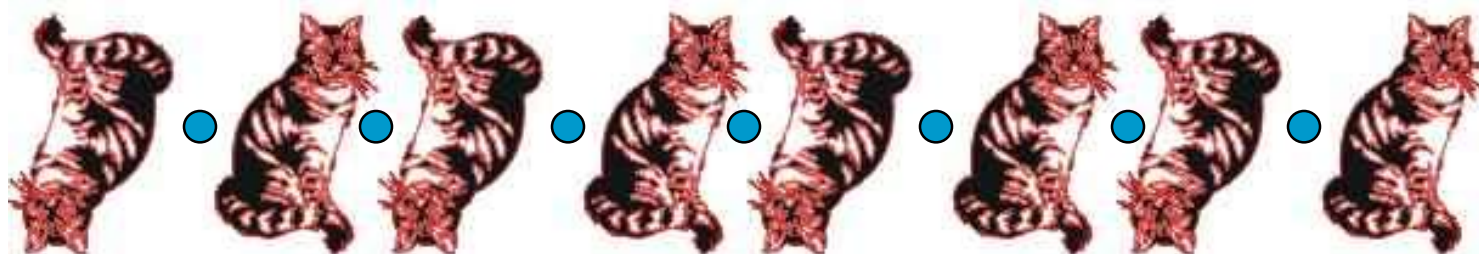
PM2

9 chatPM2.odt



P2G

11 chatP2.G.cd1

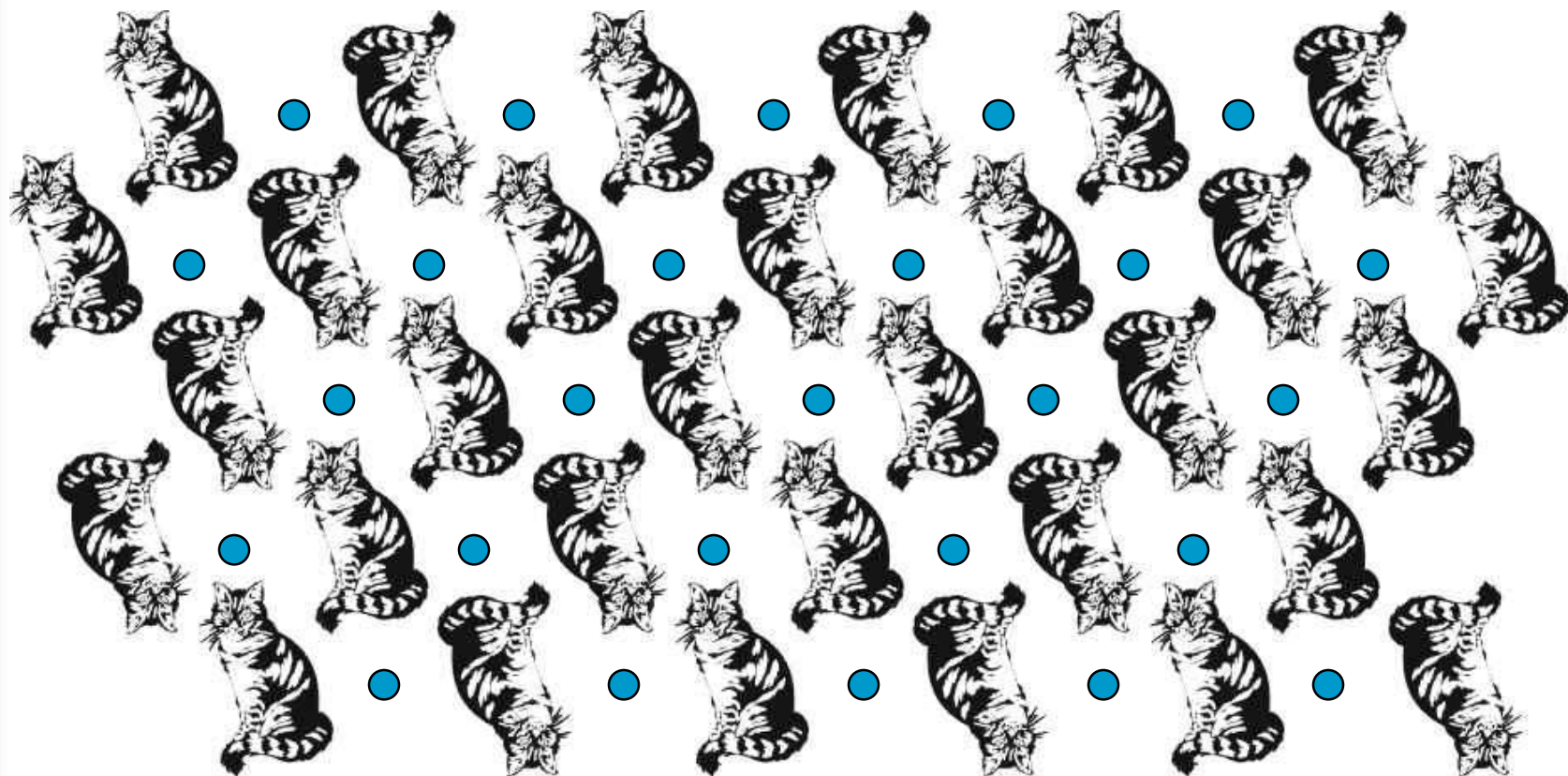




Rotations d'ordre 2, sans miroirs

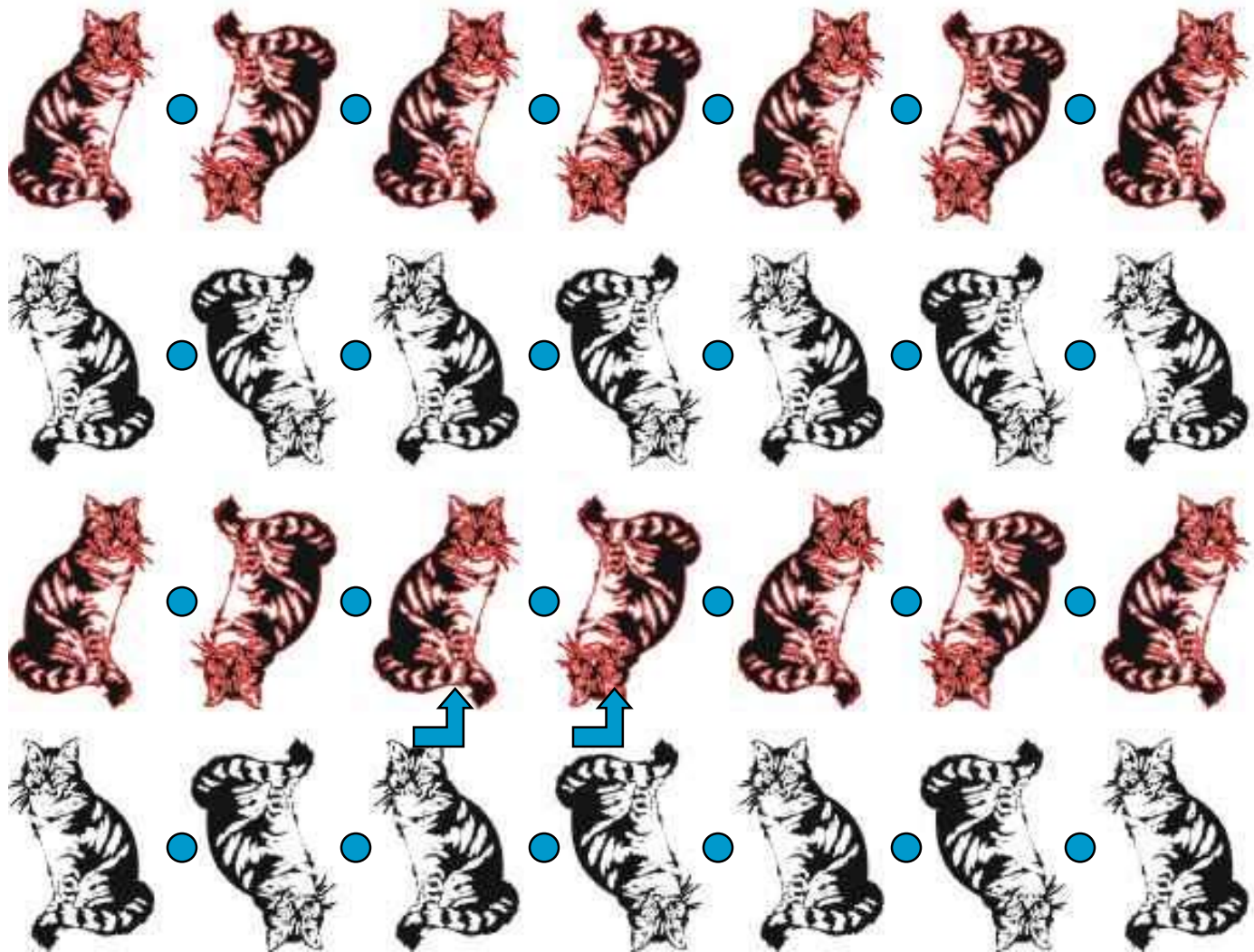
- Il existe des symétries glissées
- Il n'existe pas de symétries glissées
- Type pg_2
- Type p_2

P2



PG2

12 chatPG2.edi

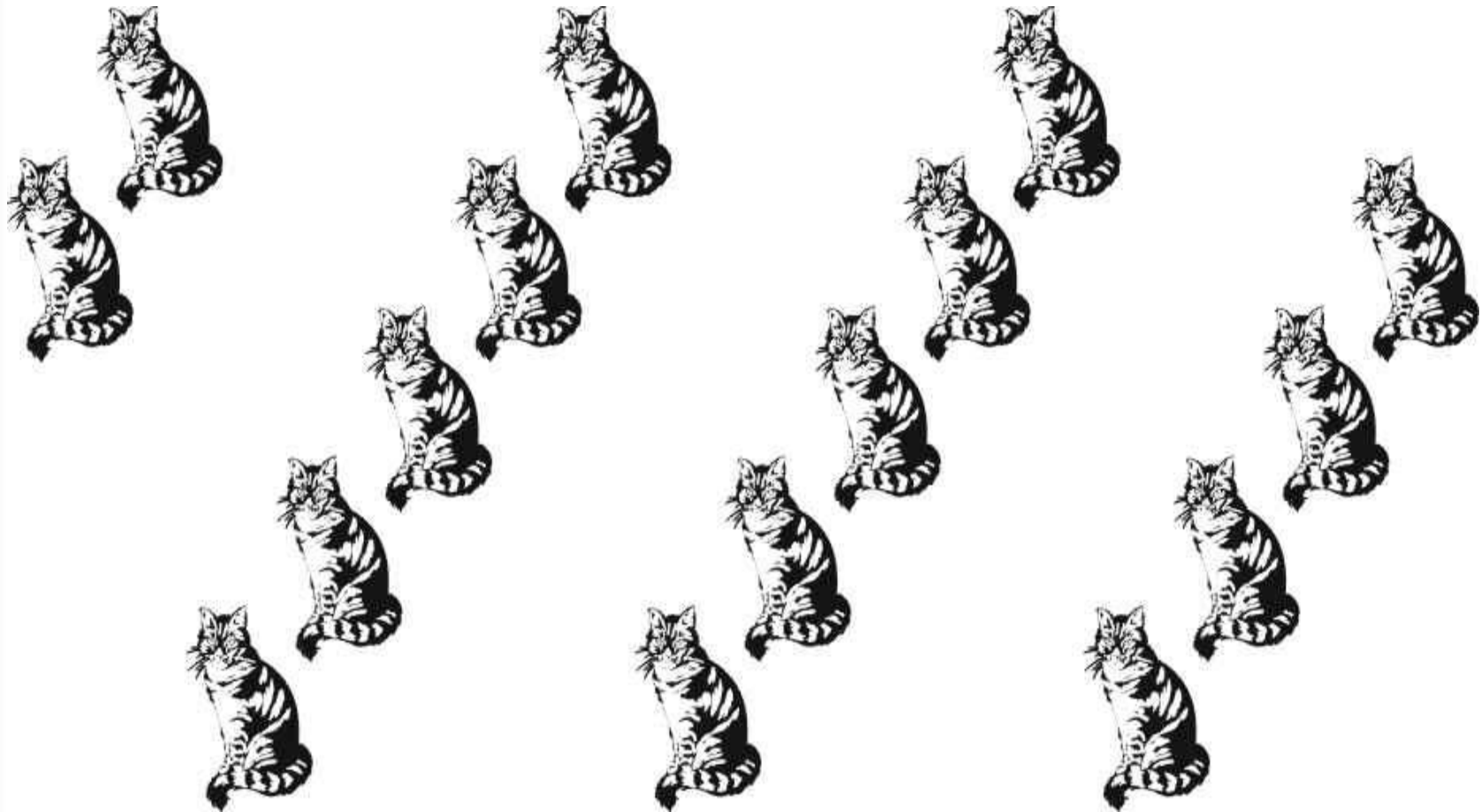




Pas de rotations

- Des miroirs + des symétries glissées «plus courtes» que les translations
- Des miroirs
- Pas de miroirs, mais des symétries glissées
- Ni miroirs, ni symétries glissées
- Type pm1
- Type p1m
- Type p1g (ou pg1)
- Type p1

P1 seulement des Translations



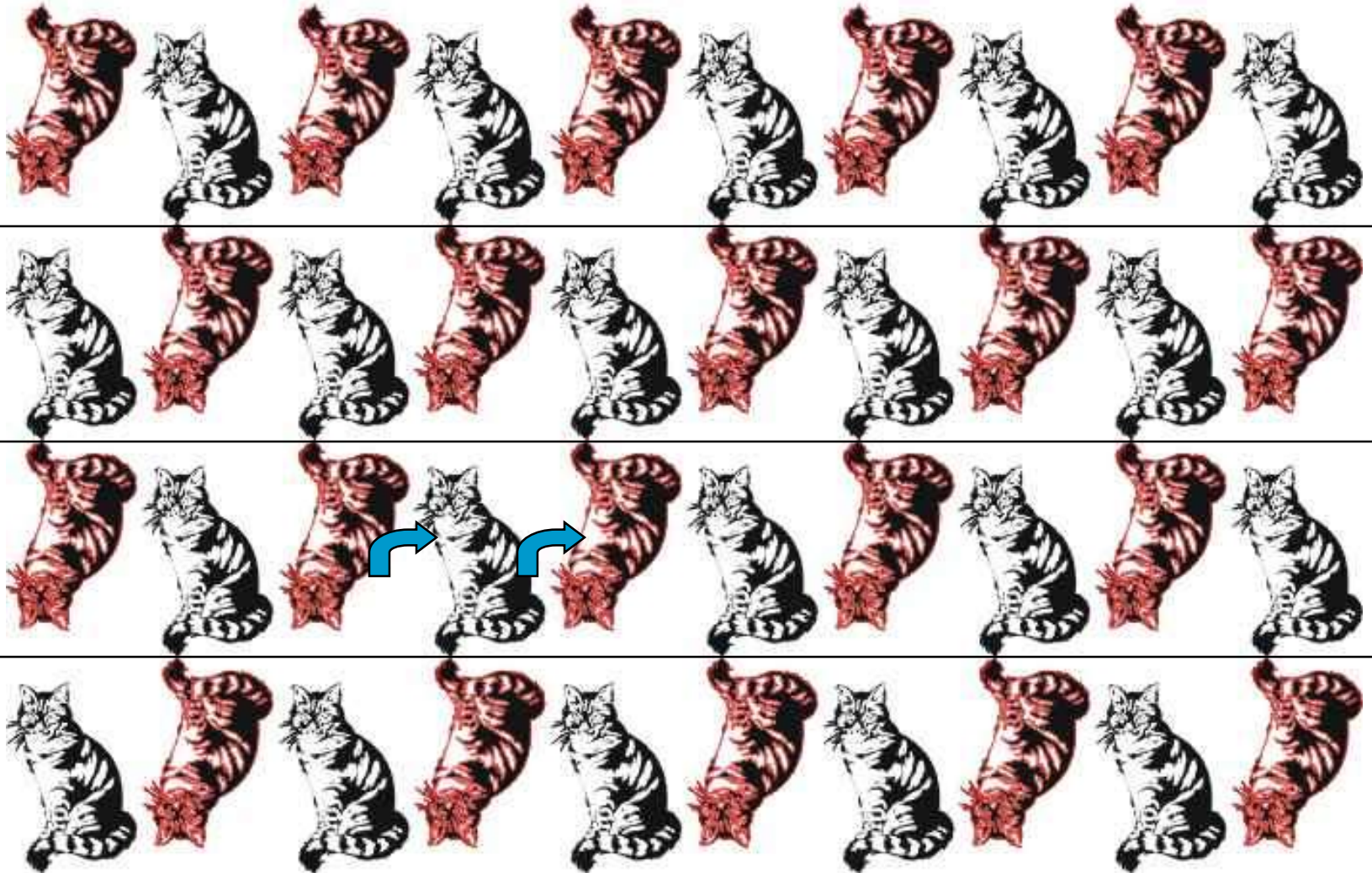
P1M

7 chatP1M.cdr



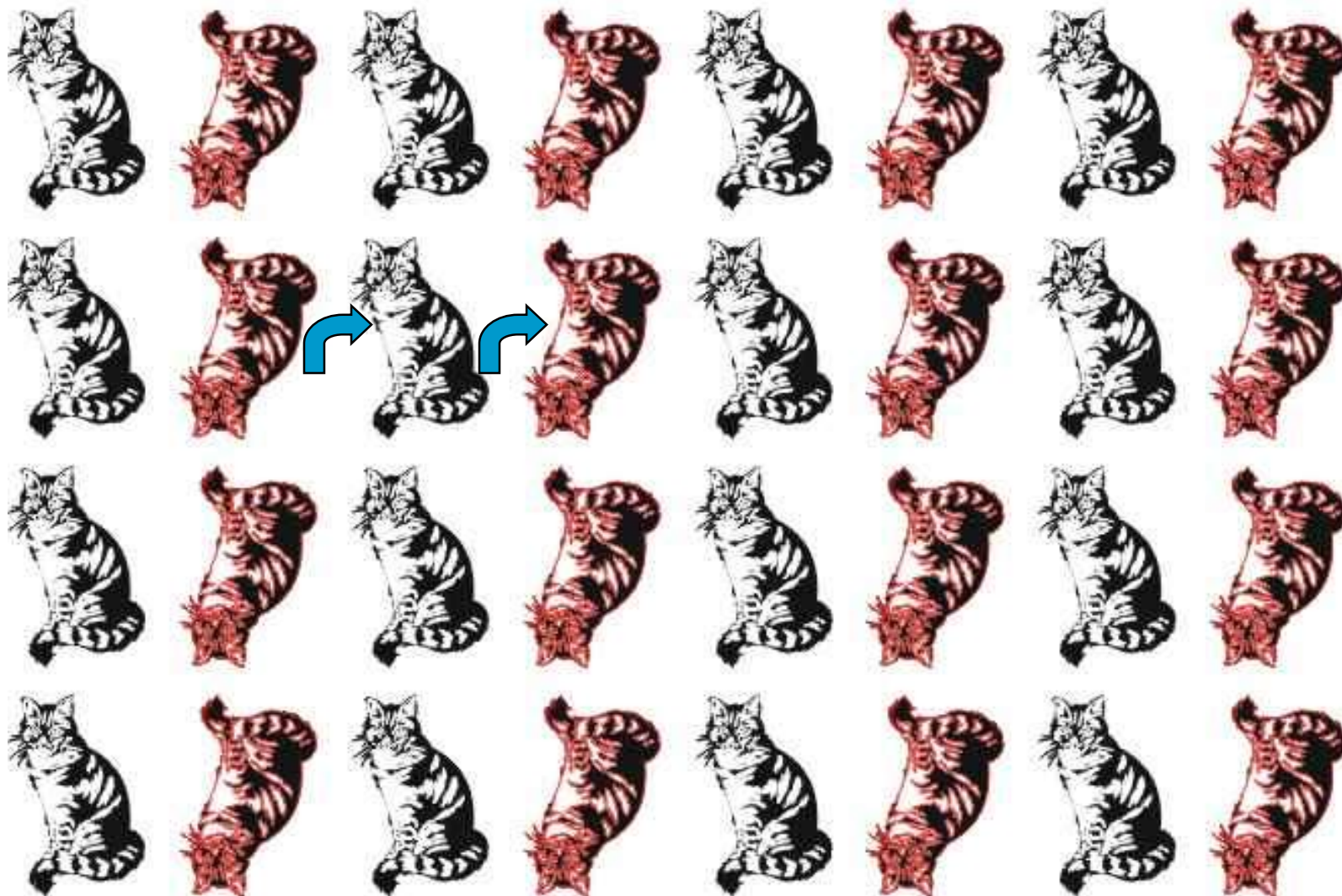
PM1

6chatPM1.cdr



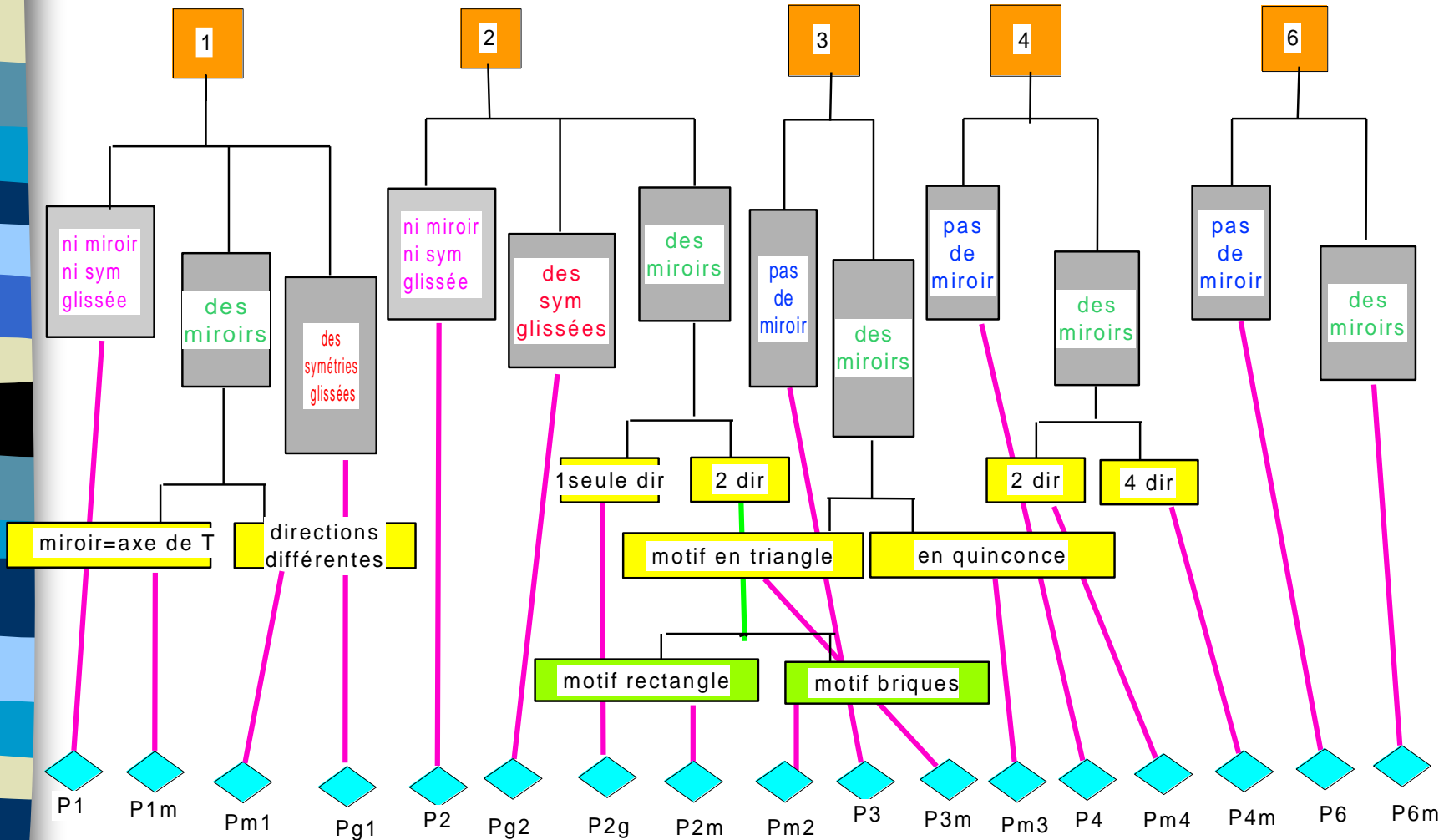
PIG

BehafPIG.edi



Classification des Pavages (suite)

Combien de rotations (au maximum) conservent un point?



Et les cristaux ?

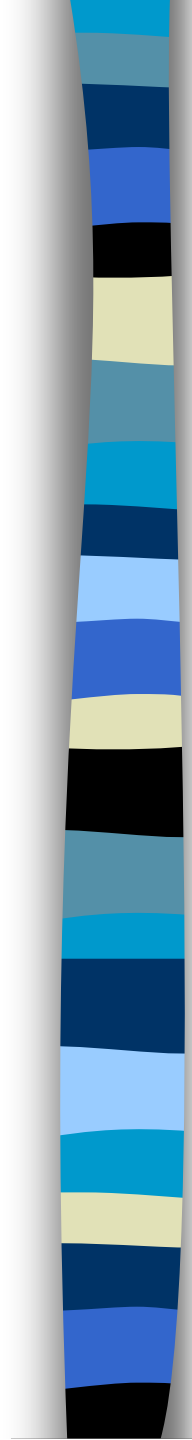


EXPO 2000 Symétries du Monde



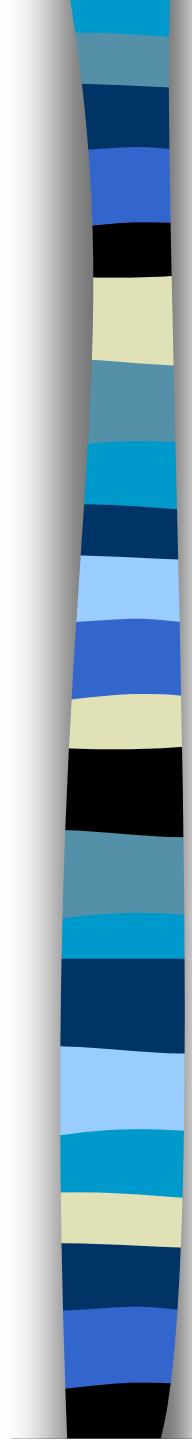
Et les cristaux?

L'analogie des types de rosaces dans l'espace (figures **finies**, pas de translation, analogue des types de rosaces) est composé de 14 "types de symétrie"

- 
- Sept d'entre eux peuvent comprendre une rotation de n'importe quel ordre ; ce sont les types de symétrie des prismes et pyramides, et leurs sous-groupes.
 - Les sept autres correspondent aux types de symétrie des polyèdres réguliers et à certains de leurs sous-groupes.

Nomenclature des 14 types de rosaces



- 
- Si l'on considère l'existence de translations, on ne peut plus avoir n'importe quel ordre de rotations ; comme dans le plan, les seules rotations possibles sont d'ordre 2, 3, 4 ou 6.

Classification complète

- Les cristaux peuvent alors être répartis en 32 types de symétrie “locale” (ne tenant compte que des rotations et miroirs)
- La classification complète des types de cristaux, incluant les translations (analogue des 17 types de pavages), fait apparaître 230 “types de symétrie”, dont 218 ont été à ce jour observés dans la nature.

Nomenclature des 32 classes
cristallographiques



Merci pour votre attention!

Réalisé à l'occasion de l'EXPO 2000
consacrée aux Symétries du Monde.

Scénario: Agot

Réalisation: Gdm



Université Libre de Bruxelles
Centenaire de la Section des Sciences Sociales



The End...

MAT

sch